Les biholomorphismes du disque unité

Lemme 1 (Lemme de Schwarz). *Soit $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ telle que $f(0) = 0$ et $\forall z \in D(0,1)$, $|f(z)| \leqslant 1$, alors $\forall z \in D(0,1)$, $|f(z)| \leqslant |z|$.*
S'il existe $z_0 \in D(0,1) \setminus \{0\}$ pour lequel $|f(z_0)| = |z_0|$, alors il existe une constante λ de module 1 telle que $\forall z \in D(0,1)$, $f(z) = \lambda z$.

Démonstration.

Comme f est holomorphe, elle est analytique, et on peut écrire :

$$f(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n \quad \text{avec} \quad \forall n \in \mathbb{N}, a_n \in \mathbb{C}$$

Comme $f(0) = 0$, on a $a_0 = 0$, donc :

$$f(z) = \sum_{n \geqslant 1} a_n z^n = z \underbrace{\left(\sum_{n \geqslant 1} a_n z^{n-1} \right)}_{\varphi(z)} = z\varphi(z) \quad \text{avec} \quad \forall n \in \mathbb{N}, a_n \in \mathbb{C}$$

Soit $r < 1$, alors, par le principe du maximum appliqué à φ :

$$\max_{z \in D(0,r)} |\varphi(z)| \leqslant \max_{|z|=r} |\varphi(z)| = \max_{|z|=r} \left| \frac{f(z)}{z} \right| = \max_{|z|=r} \frac{|f(z)|}{r} \leqslant \frac{1}{r}$$

En faisant tendre r vers 1, on obtient :

$$\frac{|f(z)|}{|z|} = |\varphi(z)| \leqslant 1$$

Donc $|f(z)| \leqslant |z|$.

On suppose qu'il existe $z_0 \in D(0,1)$ tel que $|f(z_0)| = |z_0|$, alors $|\varphi(z_0)| = 1$.
Par le principe du maximum, φ est constante de module 1.
Donc il existe λ de module 1 tel que pour tout $z \in D(0,1)$, □

Corollaire 2. *Les automorphismes (bijections biholomorphes) de $D(0,1)$ tels que $f(0) = 0$ sont de la forme : $z \mapsto e^{i\theta} z$, où $\theta \in \mathbb{R}$.*

Démonstration.

Soit f un automorphisme de $D(0,1)$ tel que $f(0) = 0$.
On applique le lemme de Schwarz à f et f^{-1} : pour tout $z \in D(0,1)$, $|f(z)| \leqslant |z|$ et $|f^{-1}(z) \leqslant |z|$.
On en déduit que $|f(z)| \leqslant |z| \leqslant |f(z)|$, et donc $|f(z)| = |z|$.
Par le lemme de Schwarz, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $f(z) = e^{i\theta} z$. □

Corollaire 3. $\mathrm{Aut}(D(0,1)) = \left\{ z \mapsto e^{i\theta} \left(\frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} \right) \mid \theta \in \mathbb{R}, |z_0| < 1 \right\}$

Démonstration.

Les transformations homographiques définies sur $D(0,1)$ de la forme :

$$f_{\theta,z_0} : z \mapsto e^{i\theta}\left(\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right) \quad \text{avec} \quad \theta \in \mathbb{R}, |z_0| < 1$$

sont holomorphes comme quotient de fonctions holomorphes, puisque $|\overline{z_0}z| < 1$ si $|z| < 1$, donc $1 - \overline{z_0}z \neq 0$. De plus, elles définissent une bijection de $D(0,1)$ dans lui-même. En effet, si $|z| = 1$, alors $z^{-1} = \overline{z}$, et :

$$|f_{\theta,z_0}(z)| = \left|\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right| = \left|\frac{1}{z}\frac{z-z_0}{\overline{z}-\overline{z_0}}\right| = \frac{1}{|z|}\frac{|z-z_0|}{|\overline{z}-\overline{z_0}|} = 1$$

Donc, par le principe du maximum, si $|z| < 1$, alors $f(z) \in D(0,1)$. De plus :

$$f_{\theta,z_0}(z) = y \Leftrightarrow e^{i\theta}(z-z_0) = y(1-z\overline{z_0}) \Leftrightarrow z(e^{i\theta}+y\overline{z_0}) = y + e^{i\theta}z_0 \Leftrightarrow z = \frac{y+e^{i\theta}z_0}{e^{i\theta}+y\overline{z_0}} = f_{-\theta,-e^{i\theta}z_0}(y)$$

Ainsi, $f_{\theta,z_0}^{-1} = f_{-\theta,-e^{i\theta}z_0}$, donc f_{θ,z_0}^{-1} est bijective de réciproque holomorphe.

Réciproquement, soit $z_0 = f^{-1}(0) \in D(0,1)$. On désigne par f_0 l'homographie $z \mapsto \frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}$ définie sur l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{\overline{z_0}}\}$, et on pose $g = f \circ f_0^{-1}$. Notons que g est un automorphisme de $D(0,1)$ comme composée. Dès lors, $g(0) = f \circ f_0^{-1}(0) = f(z_0) = 0$. Par le corollaire 2, on a $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $g(z) = e^{i\theta}z$ pour tout $z \in D(0,1)$, donc :

$$f(z) = g \circ f_0(z) = e^{i\theta}\left(\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right)$$

□

Conclusion. Les biholomorphismes de $D(0,1)$ sont de la forme $z \mapsto e^{i\theta}\left(\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right)$, où $\theta \in \mathbb{R}$ et $z_0 \in D(0,1)$. ◁

Références

[Les] Ahmed Lesfari. *Variables complexes.* Ellipses